Naam:

Practicum vallende ballenstapel

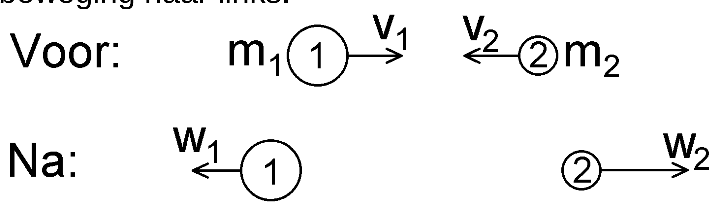
Doel van de proef

Als we een tennisbal op het hoogste punt van een basketbal leggen en het geheel op de grond laten vallen, zal de tennisbal na het neerkomen met een flinke snelheid omhoog vliegen. In het ideale geval, waarbij er geen energieverliezen zijn en de massa van de tennisbal verwaarloosbaar is ten opzichte van de basketbal, zal de snelheid, waarmee de tennisbal omhoog schiet, drie keer zo groot zijn als de daalsnelheid bij het neerkomen op de grond.

In de praktijk zijn energieverliezen niet te verwaarlozen. In dit practicum gaan we de energieverliezen onderzoeken. Hieronder volgt eerst wat theorie over de valproef. Daarbij is bal 1 de basketbal en bal 2 de tennisbal.

Theorie

In de onderstaande figuur botsen twee ballen 1 en 2 centraal op elkaar. De massa's van de ballen zijn m_1 en m_2. De snelheden vóór de botsing zijn v_1 en v_2. De snelheden na de botsing zijn w_1 en w_2. Het teken van de snelheid geeft de richting aan: positief wil zeggen een beweging naar rechts en negatief wil zeggen een beweging naar links.



Laten we eerst uitgaan van een elastische botsing.
Volgens de wet van behoud van impuls geldt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \qquad \text{(A)}$$

Omdat er geen kinetische energie verloren gaat, geldt:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 w_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 w_2^2 \qquad \text{(B)}$$

Uit vergelijking A volgt:

$$m_1 (v_1 - w_1) = m_2 (w_2 - v_2) \qquad \text{(C)}$$

Uit vergelijking B volgt:

$$m_1 (v_1^2 - w_1^2) = m_2 (w_2^2 - v_2^2)$$

Hieruit volgt:

$$m_1 (v_1 + w_1)(v_1 - w_1) = m_2 (w_2 + v_2)(w_2 - v_2)$$

Als we deze laatste vergelijking combineren met vergelijking C, krijgen we:

$$v_1 + w_1 = w_2 + v_2$$

Hergroepering levert:

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \qquad \text{(D)}$$

De betekenis van vergelijking D is dat de afstand tussen de ballen in hetzelfde tempo kleiner wordt vóór de botsing als groter wordt na de botsing. Vergelijking D geldt alleen voor elastische botsingen (geen verlies van kinetische energie). Om energieverliezen in de berekeningen toe te laten, voeren we de 'coëfficiënt van restitutie' in. Hiervoor geldt:

$$\varepsilon = \frac{w_2 - w_1}{v_1 - v_2} \qquad \text{(E)}$$

De waarde van ε ligt tussen 0 (volledig inelastische botsing) en 1 (volledig elastische botsing).

We willen nu w_1 en w_2 uitdrukken in v_1 en v_2.
We gaan hierbij uit van de volgende vergelijkingen (vergelijking A en E).

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2$$

$$\varepsilon v_1 - \varepsilon v_2 = w_2 - w_1$$

Hieruit volgen de volgende twee vergelijkingen.

$$w_1 = \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2(1+\varepsilon)}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

en

$$w_2 = \frac{m_1(1+\varepsilon)}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - \varepsilon m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \qquad \text{(F)}$$

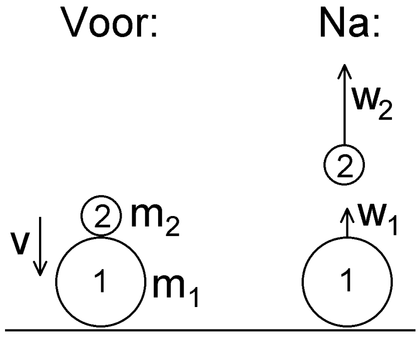
Stel dat de coëfficiënt van restitutie ε gelijk is aan 1 (elastische botsing) en dat m_1 veel groter is dan m_2. De laatste twee formules gaan dan bij benadering over in:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = 2v_1 - v_2$$

Hieruit volgt dat met name bal 2 een grote snelheidsverandering ondergaat.

We kunnen de bovenstaande theorie nu toepassen op de situatie in de figuur hiernaast. Hierin rust op bal 1 (= basketbal) een veel lichtere bal 2 (= tennisbal) en beweegt de combinatie van ballen omlaag. Zolang bal 1 de grond niet raakt, hebben beide ballen steeds dezelfde snelheid. Er is dan dus nog geen mechanische wisselwerking tussen de twee ballen en blijft de combinatie van ballen intact. We spreken af dat naar boven gerichte snelheden positief zijn. Net voordat bal 1 de grond raakt, hebben de ballen de (gemeenschappelijke) snelheid -v waarbij v per definitie positief is. Na de terugkaatsing tegen de grond heeft bal 1 snelheid w_1 en bal 2 snelheid w_2.



Bij de volgende analyse berekenen we de snelheid w_2 bij een gegeven snelheid v. We nemen hierbij aan dat het gehele botsingsproces opgevat kan worden als twee aparte botsingen die na elkaar plaatsvinden namelijk a) die van bal 1 tegen de grond en b) de botsing van bal 1 met bal 2. In de analyse is ε_1 de coëfficiënt van restitutie van de eerste botsing en ε_2 de coëfficiënt van restitutie van de tweede botsing.

Als bal 1 tegen de grond weerkaatst is, heeft hij snelheid $\varepsilon_1 v$. Als bal 1 vervolgens tegen bal 2 weerkaatst, krijgt deze laatste bal een snelheid w_2 waarvoor geldt:

$$w_2 = \frac{m_1(1+\varepsilon_2)}{m_1+m_2}\cdot\varepsilon_1 v + \frac{m_2-\varepsilon_2 m_1}{m_1+m_2}\cdot(-v)$$

We kunnen deze uitdrukking vereenvoudigen tot:

$$w_2 = \frac{m_1(\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2)-m_2}{m_1+m_2}\cdot v$$

Opdracht

Bepaal door middel van een onderzoek de grootte van de coëfficiënten van restitutie ε_1 en ε_2.